Chapitre 13 : variables aléatoires finies
Feuille d'exercices

Exercice 1 A la sortie d'une usine fabriquant des voitures, il y a 1% de risque que la voiture soit rayée en sortant du parking. On suppose que ce risque est indépendant à chaque sortie de véhicule. Le parking contient 100 voitures. Quelle est la loi du nombre de voitures rayées ? Quelle est la probabilité qu'une voiture soit rayée ? Qu'au moins une soit rayée ?

Exercice 2 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies sur (Ω, P) qui suivent la même loi.

1. Ecrire ce que cela signifie. A-t-on nécessairement $E(X) = E(Y)$?
2. A-t-on nécessairement $X = Y$? Justifier concrètement votre réponse.

Exercice 3 Un dé à 6 faces équilibré a une face marquée 1, deux marquées 2, deux marquées 3 et une marquée 4. Soit X la variable aléatoire donnant la face obtenue lors d'un lancer.

1. Déterminez la loi de X, représenter son diagramme en bâton.
2. Calculez $E(X)$ et $V(X)$.
3. Calculez $E(\frac{1}{X})$ et $E(\ln(X))$.

Exercice 4 Une urne contient 1 boule rouge, 2 noires et 2 jaunes. On tire successivement et sans remise une boule jusqu'à ce qu'il ne reste que deux couleurs. Soit X le nombre de tirages nécessaires. Déterminer la loi de X.

Exercice 5 Un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 est truqué pour que la probabilité d'apparition d'une face soit proportionnelle à la valeur indiquée. On lance ce dé. Soit X la variable aléatoire donnant le numero de la face obtenue. Déterminez la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 6 On lance deux dés équilibrés à 6 faces, et on suppose que les résultats donnés par les dés sont indépendants.

On note Y le maximum des deux chiffres et Z le minimum.

1. Calculez pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$ la probabilité $P(Y \leq k)$
2. En déduire la loi de Y.
3. A partir du calcul de $P(Z \geq k)$, déterminez la loi de Z.

Exercice 7 Soit A une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, ..., N\}$, où $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geq 4$

1. Recalculez l'expression de $E(A)$ et $\text{Var}(A)$
2. Soit $V = A^2$, $W = A^2 + 1$ et $Z = (A-3)^2$. Déterminer l'espérance de V, W et Z avec un minimum de calcul. Déterminer la loi de ces variables aléatoires.

Exercice 8 Un chapeau magique contient $n-1$ lapins blancs et un lapin noir. On procède à l'extraction sans remise des lapins, jusqu'à ce qu'il n'en ait plus dans le chapeau. Soit X le rang de l'extraction du lapin noir. Déterminez la loi de X, son espérance et calculez sa variance.

Exercice 9 (Quizz loi) Donner la loi de X dans chacun des cas suivants, sans refaire les calculs. Préciser l'univers image et les paramètres.

1. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. X est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.
2. Dans un champs paissent 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de ce champs. X est le nombre de bosses.
3. On range 20 cravates dans 3 tiroirs, au hasard. X est le nombre de cravates dans le premier tiroir.
4. Un jeu de tarot est mélangé et posé faces cachées. On retourne une par une les cartes jusqu'à trouver l'Excuse. X est le nombre de cartes retournées au total.
5. Aux dernières élections, une proportion p d'individus s'est abstenue. On interroge une personne au hasard dans la rue. X vaut 0 si la personne n'a pas voté, 1 si elle est a voté.

   Même situation, mais on interroge 100 personnes. X est le nombre de votants.

Exercice 10 Une urne contient au départ une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la même couleur que celle qui vient d'être tirée. On note X_n la v.a. égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Déterminez la loi de X_1, de X_2 et de X_3.
2. Quelle conjecture pouvez vous faire pour la loi de X_n ? Démontrez cette conjecture.

Exercice 11 Ne disposant pas de moyen simple pour reconnaitre ses clés, un professeur de mathématiques doit essayer au hasard parmi ses 10 clés pour ouvrir la porte de sa salle. On note X le nombre d'essais avant que la porte soit ouverte (y compris l'essai concluant).

1. Déterminez la loi de X et son espérance dans le cas où le professeur n'essaie pas deux fois la même clé.
2. On suppose que le professeur n'est pas bien réveillé et peut essayer plusieurs fois la même clé (y compris deux fois de suite...). On suppose également que au bout d'un nombre fixé $n \in \mathbb{N}^*$ d'essais, il se résout à appeler à l'aide et se fait ouvrir par un agent de service.
   a) Déterminez la loi de X et son espérance en fonction de n.
   b) Calculez la limite lorsque $n \to +\infty$ de cette espérance.
3. On suppose $n \to +\infty$. Le professeur est mal réveillé une fois sur 4. Ce matin, après 5 essais, il n'a toujours pas réussi à ouvrir la porte de la salle. Calculez la probabilité qu'il ne soit pas bien réveillé.

Exercice 12 Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ noires ($n \geq 3$). On effectue des tirages successifs sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le nombre de boules noires restant alors dans l'urne.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Vérifier que la somme des probabilités fait 1.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.
4. Exprimer Y en fonction de X et en déduire l'espérance de Y.

Chapitre 13 : variables aléatoires finies
Feuille d'exercices

Exercice 1 A la sortie d'une usine fabriquant des voitures, il y a 1% de risque que la voiture soit rayée en sortant du parking. On suppose que ce risque est indépendant à chaque sortie de véhicule. Le parking contient 100 voitures. Quelle est la loi du nombre de voitures rayées ? Quelle est la probabilité qu'une voiture soit rayée ? Qu'au moins une soit rayée ?

Exercice 2 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies sur (Ω, P) qui suivent la même loi.

1. Ecrire ce que cela signifie. A-t-on nécessairement $E(X) = E(Y)$?
2. A-t-on nécessairement $X = Y$? Justifier concrètement votre réponse.

Exercice 3 Un dé à 6 faces équilibré a une face marquée 1, deux marquées 2, deux marquées 3 et une marquée 4. Soit X la variable aléatoire donnant la face obtenue lors d'un lancer.

1. Déterminez la loi de X, représenter son diagramme en bâton.
2. Calculez $E(X)$ et $V(X)$.
3. Calculez $E(\frac{1}{X})$ et $E(\ln(X))$.

Exercice 4 Une urne contient 1 boule rouge, 2 noires et 2 jaunes. On tire successivement et sans remise une boule jusqu'à ce qu'il ne reste que deux couleurs. Soit X le nombre de tirages nécessaires. Déterminer la loi de X.

Exercice 5 Un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 est truqué pour que la probabilité d'apparition d'une face soit proportionnelle à la valeur indiquée. On lance ce dé. Soit X la variable aléatoire donnant le numero de la face obtenue. Déterminez la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 6 On lance deux dés équilibrés à 6 faces, et on suppose que les résultats donnés par les dés sont indépendants.

On note Y le maximum des deux chiffres et Z le minimum.

1. Calculez pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$ la probabilité $P(Y \leq k)$
2. En déduire la loi de Y.
3. A partir du calcul de $P(Z \geq k)$, déterminez la loi de Z.

Exercice 7 Soit A une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, ..., N\}$, où $N \in \mathbb{N}^*$, $N \geq 4$

1. Recalculez l'expression de $E(A)$ et $\text{Var}(A)$
2. Soit $V = A^2$, $W = A^2 + 1$ et $Z = (A-3)^2$. Déterminer l'espérance de V, W et Z avec un minimum de calcul. Déterminer la loi de ces variables aléatoires.

Exercice 8 Un chapeau magique contient $n-1$ lapins blancs et un lapin noir. On procède à l'extraction sans remise des lapins, jusqu'à ce qu'il n'en ait plus dans le chapeau. Soit X le rang de l'extraction du lapin noir. Déterminez la loi de X, son espérance et calculez sa variance.

Exercice 9 (Quizz loi) Donner la loi de X dans chacun des cas suivants, sans refaire les calculs. Préciser l'univers image et les paramètres.

1. On suppose que la probabilité de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. X est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.
2. Dans un champs paissent 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de ce champs. X est le nombre de bosses.
3. On range 20 cravates dans 3 tiroirs, au hasard. X est le nombre de cravates dans le premier tiroir.
4. Un jeu de tarot est mélangé et posé faces cachées. On retourne une par une les cartes jusqu'à trouver l'Excuse. X est le nombre de cartes retournées au total.
5. Aux dernières élections, une proportion p d'individus s'est abstenue. On interroge une personne au hasard dans la rue. X vaut 0 si la personne n'a pas voté, 1 si elle est a voté.

   Même situation, mais on interroge 100 personnes. X est le nombre de votants.

Exercice 10 Une urne contient au départ une boule blanche et une boule rouge. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la même couleur que celle qui vient d'être tirée. On note X_n la v.a. égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Déterminez la loi de X_1, de X_2 et de X_3.
2. Quelle conjecture pouvez vous faire pour la loi de X_n ? Démontrez cette conjecture.

Exercice 11 Ne disposant pas de moyen simple pour reconnaitre ses clés, un professeur de mathématiques doit essayer au hasard parmi ses 10 clés pour ouvrir la porte de sa salle. On note X le nombre d'essais avant que la porte soit ouverte (y compris l'essai concluant).

1. Déterminez la loi de X et son espérance dans le cas où le professeur n'essaie pas deux fois la même clé.
2. On suppose que le professeur n'est pas bien réveillé et peut essayer plusieurs fois la même clé (y compris deux fois de suite...). On suppose également que au bout d'un nombre fixé $n \in \mathbb{N}^*$ d'essais, il se résout à appeler à l'aide et se fait ouvrir par un agent de service.
   a) Déterminez la loi de X et son espérance en fonction de n.
   b) Calculez la limite lorsque $n \to +\infty$ de cette espérance.
3. On suppose $n \to +\infty$. Le professeur est mal réveillé une fois sur 4. Ce matin, après 5 essais, il n'a toujours pas réussi à ouvrir la porte de la salle. Calculez la probabilité qu'il ne soit pas bien réveillé.

Exercice 12 Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ noires ($n \geq 3$). On effectue des tirages successifs sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le nombre de boules noires restant alors dans l'urne.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Vérifier que la somme des probabilités fait 1.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.
4. Exprimer Y en fonction de X et en déduire l'espérance de Y.